

Konstruksi Model Mental Calon Guru Matematika dalam Memahami Konsep Integral

Wayan Rumite¹

Universitas Lampung

wayan.rumite@fkip.unila.ac.id

Universitas Lampung, Jl. Prof. Dr. Ir. Sumantri Brojonegoro, RW.No: 1, Gedong Meneng, Kec. Rajabasa, Kota Bandar Lampung, Lampung 35141

Abstrak: Pemahaman suatu konsep dapat diamati melalui model mental. Informasi penting tentang struktur pemahaman siswa yang mendasari dari mana pengetahuan diperoleh dapat diidentifikasi melalui model mental. Model mental dapat menunjukkan cara bagaimana seorang individu berpikir. Individu memahami konsep matematika dengan membangun dan menggunakan struktur mental tertentu (atau konstruksi) yang dianggap dalam Teori APOS sebagai tahapan dalam pembelajaran konsep Matematika. Melalui teori APOS konsep Matematika dapat dipelajari. Teori ini adalah kerangka kerja yang digunakan untuk menjelaskan bagaimana individu secara mental membangun pemahaman mereka tentang konsep Matematika. Tujuan dari penelitian ini adalah mendeskripsikan proses konstruksi model mental calon guru matematika dalam memahami konsep integral. Responden penelitian ini yaitu mahasiswa calon Guru Matematika di Universitas Lampung yang berjumlah 23 orang. Berdasarkan hasil tes uraian awal yang diberikan, peneliti memilih 4 orang yang selanjutnya dijadikan subjek penelitian. Tes yang digunakan dalam penelitian ini adalah tes pemahaman konsep untuk mengukur kemampuan pemahaman konsep berdasarkan indikator pemahaman konsep. Pada bagian indikator pemahaman konsep dalam penelitian ini, peneliti melakukan evaluasi proses konstruksinya model mental subjek berdasarkan teori konstruksi APOS. Berdasarkan hasil penelitian diperoleh bahwa konstruksi suatu model mental yang dimiliki calon guru matematika dalam memahami konsep integral ada yang lengkap dan ada yang tidak. Hal ini ditunjukkan berdasarkan bagaimana calon guru dalam menuliskan jawaban terkait konsep-konsep yang dapat digunakan untuk dalam menyelesaikan suatu masalah yang disajikan. Selain itu, Penelitian ini memberikan kontribusi penting dalam pengembangan kajian pedagogik matematika, khususnya dalam memahami proses berpikir calon guru matematika melalui pendekatan model mental dan teori APOS.

Kata Kunci: Konstruksi, Model Mental, Pemahaman, Konsep Integral

Abstract: *Understanding of a concept can be observed through mental models. Important information about the structure of students' understanding, which is the basis for where knowledge is obtained, can be identified through mental models. Mental models can show how an individual thinks. Individuals understand mathematical concepts by constructing and using certain mental structures (or constructions) that are considered in APOS Theory as stages in learning mathematical concepts. Mathematical concepts can be studied through APOS theory. This theory is*

a framework used to explain how individuals mentally construct their understanding of mathematical concepts. The purpose of this study is to describe the process of constructing mental models of prospective mathematics teachers in understanding the concept of integrals. The respondents of this study were 23 prospective mathematics teachers at the University of Lampung. Based on the results of the initial essay test administered, the researcher selected 4 individuals who were subsequently chosen as research subjects. The test used in this study was a concept understanding test to measure concept understanding ability based on concept understanding indicators. In the concept understanding indicator section of this study, the researcher evaluated the mental model construction process of the subjects based on the APOS construction theory. Based on the research results, it was found that the mental models possessed by prospective mathematics teachers in understanding integral concepts were either complete or incomplete. This was demonstrated by how the prospective teachers wrote their answers related to the concepts that could be used to solve the problems presented. Additionally, this study provides an important contribution to the development of mathematical pedagogical studies, particularly in understanding the thinking processes of prospective mathematics teachers through the mental model approach and APOS theory.

Keywords: *Construction, Mental Model, Understanding, Integral Concept*

Pendahuluan

Pemahaman suatu konsep yang baik perlu dimiliki oleh mahasiswa calon guru, khususnya calon guru Matematika. Hal ini karena pemahaman konsep calon guru Matematika merupakan bagian penting dari tujuan suatu pembelajaran. Pemahaman suatu konsep dapat diamati melalui model mental (Utami, dkk., 2018). Senge (2004) menggambarkan model mental sebagai representasi pemikiran internal seseorang yang membatasi seseorang dalam bertindak. Hal ini menunjukkan bahwa model mental berperan penting dalam setiap tindakan yang dilakukan seseorang yang kemudian menunjukkan pemahaman seseorang terhadap suatu konsep.

Informasi penting tentang struktur pemahaman siswa yang mendasari dari mana pengetahuan diperoleh dapat diidentifikasi melalui model mental (Vosniadou & Brewer, 1992). Sebagai contoh pengamatan awal yang telah dilakukan terhadap 30 calon guru Matematika diberikan tes: Apakah integral tentu $\int_{-1}^2 \sqrt{x} dx$ dapat Anda selesaikan? Jika ya, berapakah hasilnya? Jika tidak, mengapa? Berdasarkan hasil tes yang diberikan, terdapat dua calon guru Matematika yang berupaya

menggunakan representasi internalnya dengan memandang \sqrt{x} dengan $x \in \mathbb{R}$ sebagai bentuk fungsi yang kontinu pada interval $[0, \infty)$. Kemudian calon guru Matematika tersebut menyatakan bahwa $\int_{-1}^2 \sqrt{x} dx$ tidak dapat diselesaikan dengan alasan bahwa pada interval $-1 \leq x < 0$ diskontinu. Namun, berbeda dengan calon guru Matematika yang lainnya yang menyelesaikan masalah tersebut secara langsung, tanpa memperhatikan ketentuan bahwa suatu integral tentu dapat diselesaikan apabila fungsi yang diintegrasikan kontinu pada interval tertutup pada batas integral tentu yang diberikan. Sehingga berdasarkan ketidakpahaman ini berakibat pada kesimpulan yang tidak tepat. Berdasarkan pengamatan awal ini, peneliti memandang bawa konstruksi model mental sangat mempengaruhi bagaimana seseorang dalam memahami suatu konsep dengan baik (Utami, dkk., 2018).

Penelitian lain terkait model mental juga telah dilakukan pada pelevelan model mental. Hal ini telah diteliti oleh beberapa peneliti (Barsalou, 1992; Vosniadou, 1992; Park & Light, 2009; Bofferding, 2014; Utami, dkk, 2018; dan Rachmawati, dkk., 2019). Namun, bagaimana suatu model mental tersebut dapat dikonstruksi oleh subjek belum diteliti. Sehingga, ada bagian yang perlu digali lebih dalam untuk diteliti pada bagian bagaimana proses konstruksi model mental tersebut. Model mental dapat menunjukkan cara bagaimana seorang individu berpikir. Hal ini telah diteliti oleh beberapa peneliti (Solaz-Portoles & Lopez, 2007; Senge, 2004). Solaz-Portoles & Lopez (2007) menjelaskan bagaimana model mental digunakan untuk menjelaskan proses penalaran individu dalam memecahkan masalah silogisme. Selain itu juga, telah dilakukan penelitian terkait bagaimana model mental siswa dalam pemecahan masalah generalisasi pola (Prayekti, Nusantara, dkk., 2017). Berdasarkan beberapa penelitian tersebut terdapat bagian penting untuk diteliti selanjutnya, yaitu proses konstruksi model mental dari calon guru Matematika.

Kalkulus merupakan salah satu cabang ilmu Matematika dan juga mata kuliah yang dipelajari di perguruan tinggi. Kalkulus diferensial dan kalkulus integral adalah dua cabang utama dalam kalkulus, dimana kalkulus tersebut merupakan pintu gerbang dalam menuju pelajaran Matematika yang lebih tinggi (Utari & Utami, 2020). Hal ini karena dalam pengaplikasiannya sendiri integral

banyak ditemukan diberbagai bidang disiplin ilmu, terutama ilmu fisika maupun teknik (Haryono, 2009; Ghazi & Hilmansyah, 2018). Konsep integral tentu adalah salah satu konsep utama yang diperkenalkan dalam Kalkulus dan penting untuk dikuasai mahasiswa calon guru Matematika. Beberapa penelitian menunjukkan bahwa mahasiswa mengalami kesulitan dengan konsep integral, fungsi, limit, dan turunan (Grundmeier, dkk., 2006; Mahir, 2009; Orton, 1984; Serhan, 2009; Tall & Vinner, 1981; Tinggi, 1987). Karena integral melibatkan beberapa ide penting seperti: interval, fungsi, limit, dan turunan, maka banyak siswa kesulitan dalam memahami konsep integral. Berdasarkan uraian tersebut, peneliti akan melakukan penelitian terkait konstruksi model mental calon guru Matematika dalam memahami konsep integral.

Individu memahami konsep matematika dengan membangun dan menggunakan struktur mental tertentu (atau konstruksi) yang dianggap dalam Teori APOS sebagai tahapan dalam pembelajaran konsep matematika (Piaget & Garcí'a, 1989). Teori APOS adalah model untuk menggambarkan bagaimana konsep Matematika dapat dipelajari; teori ini adalah kerangka kerja yang digunakan untuk menjelaskan bagaimana individu secara mental membangun pemahaman mereka tentang konsep Matematika. Dari perspektif kognitif, konsep Matematika tertentu ditingkatkan dengan dekomposisi genetiknya, yaitu deskripsi tentang bagaimana konsep tersebut dapat dikonstruksi dalam pikiran individu (Arnon, dkk., 2014). Tahapan atau struktur mental tersebut terdiri dari Tindakan (Action), Proses (Process), Objek (Object), dan Skema (Schema) serta mekanisme mental meliputi interiorisasi, koordinasi, pembalikan, enkapsulasi, dan tematisasi. Dalam artikel ini, teori APOS selanjutnya digunakan sebagai kerangka pengamatan proses konstruksi model mental guru Matematika dalam memahami konsep integral. Tujuan dari penelitian ini adalah mendeskripsikan proses konstruksi model mental calon guru matematika dalam memahami konsep integral. Penelitian ini menyoroti bagaimana calon guru Matematika secara bertahap membangun model mental dalam memahami konsep integral. Pendekatan ini memberikan gambaran yang lebih dalam daripada sekadar melihat hasil akhir atau jawaban.

Metode Penelitian

Jenis penelitian ini adalah penelitian deskriptif dengan pendekatan kualitatif dengan jenis eksplorasi. Tujuan utama dari penelitian deskriptif adalah untuk memberikan gambaran yang akurat terkait status atau karakteristik dari situasi atau fenomena yang terjadi di lapangan (Johnson & Christensen, 2004). Penelitian ini dilakukan di Universitas Lampung, tepatnya di program studi Pendidikan Matematika. Responden penelitian ini yaitu mahasiswa calon Guru Matematika yang berjumlah 23 orang. Berdasarkan hasil tes uraian awal yang diberikan, peneliti memilih 4 orang yang selanjutnya dijadikan subjek penelitian. Pemilihan ini atas dasar ada dan tidaknya kemunculan unsur-unsur pemahaman konsep dalam jawaban responden dan juga atas dasar kemampuan komunikasi responden untuk mempermudah wawancara dalam penggalan informasi yang lebih mendalam atas jawaban yang ditulis pada lembar jawaban soal.

Instrumen utama dalam penelitian ini adalah para peneliti itu sendiri yang bertindak sebagai perencana, pengumpul data, analisis data, dan menyimpulkan hasil penelitian. Tes yang digunakan dalam penelitian ini adalah tes pemahaman konsep untuk mengukur kemampuan pemahaman konsep berdasarkan indikator pemahaman konsep, yaitu: (a) menyatakan ulang sebuah konsep, (b) mengklasifikasikan objek-objek menurut sifat-sifat tertentu (sesuai dengan konsepnya), (c) memberikan contoh dan non-contoh dari konsep, (d) menyajikan konsep dalam berbagai bentuk representasi matematis, (e) mengembangkan syarat perlu dan syarat cukup suatu konsep, (f) menggunakan, memanfaatkan dan memilih prosedur atau operasi tertentu dan (g) mengaplikasikan konsep atau algoritma pemecahan masalah (Depdiknas, 2006). Berikut daftar soal tes yang digunakan untuk memperoleh data dalam penelitian ini. Apakah ke-4 integral tentu berikut ini dapat Anda selesaikan? Jika ya, berapakah hasilnya? Jika tidak, mengapa?

i. $\int_{-1}^2 \sqrt{x} dx$

ii. $\int_0^3 12 - \frac{4}{3}x dx$

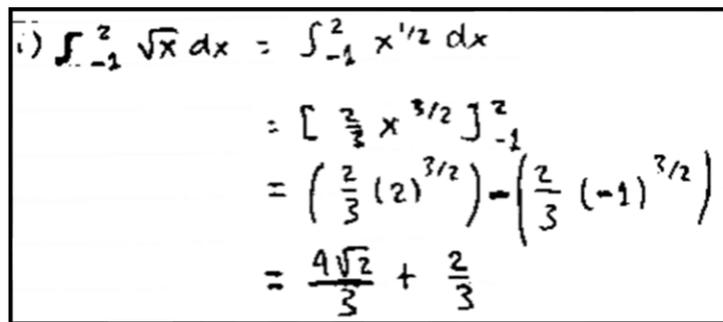
iii. $\int_1^4 \frac{2}{x^2} dx$

iv. $\int_{-2}^1 \frac{1}{x} dx$

Peneliti juga menggunakan pedoman wawancara, dan dokumentasi dalam pengumpulan data. Pada bagian indikator pemahaman konsep dalam penelitian ini, peneliti melakukan evaluasi proses konstruksinya model mental subjek berdasarkan teori konstruksi APOS.

Hasil dan Pembahasan

Berikut diuraikan hasil penelitian dan pembahasan berdasarkan penelitian yang dilakukan oleh peneliti untuk soal tes (i) Apakah integral tentu $\int_{-1}^2 \sqrt{x} dx$ dapat Anda selesaikan? Jika ya, berapakah hasilnya? Jika tidak, mengapa? Untuk soal tes (i) tersebut, subjek satu (S1) disajikan pada Gambar 1 berikut.



The image shows a handwritten solution for the definite integral of the square root of x from -1 to 2. The solution is written in black ink on a white background. It starts with the integral expression: $\int_{-1}^2 \sqrt{x} dx = \int_{-1}^2 x^{1/2} dx$. The next line shows the antiderivative: $= \left[\frac{2}{3} x^{3/2} \right]_{-1}^2$. The third line shows the evaluation at the upper and lower bounds: $= \left(\frac{2}{3} (2)^{3/2} \right) - \left(\frac{2}{3} (-1)^{3/2} \right)$. The final line shows the simplified result: $= \frac{4\sqrt{2}}{3} + \frac{2}{3}$.

Gambar 1. Jawaban Soal (i) $\int_{-1}^2 \sqrt{x} dx$ Oleh Subjek Satu (S1)

Berdasarkan jawaban yang ditulis oleh subjek satu (S1) seperti yang tertera pada Gambar 1, tampak bahwa S1 langsung melakukan proses penyelesaian tanpa memperhatikan kekontinuan \sqrt{x} pada interval $[-1,2]$. Untuk hasil ini, peneliti memperjelas maksud jawaban yang ditulis oleh S1 melalui wawancara sebagai berikut.

P: Mengapa Anda memilih langkah penyelesaian secara langsung atas soal (i) $\int_{-1}^2 \sqrt{x} dx$ yang diberikan?

S1: Karena soal tersebut relatif mudah untuk saya selesaikan, jadi langsung saya selesaikan menggunakan aturan integral tentu yang saya pahami. Kemudian, setelah saya kerjakan, saya memperoleh jawaban seperti itu.

P: Apakah Anda sudah yakin dengan jawaban yang Anda tuliskan?

S1: Ya, saya yakin.

Untuk soal tes (i) tersebut, subjek dua (S2) disajikan pada Gambar 2 berikut.

Gambar 2. Jawaban Soal (i) $\int_{-1}^2 \sqrt{x} dx$ Oleh Subjek Dua (S2)

Berdasarkan jawaban yang ditulis oleh subjek dua (S2) seperti yang tertera pada Gambar 2, tampak bahwa S2 langsung melakukan proses penyelesaian tanpa memperhatikan kekontinuan \sqrt{x} pada interval $[-1,2]$. Namun, diakhir penyelesaian, subjek menyimpulkan bahwa soal tes (i) $\int_{-1}^2 \sqrt{x} dx$ tidak dapat diselesaikan atas dasar adanya unsur akar imajiner pada hasil yang diperoleh. Untuk hasil ini, peneliti memperjelas maksud jawaban yang ditulis oleh S3 melalui wawancara sebagai berikut.

P: Mengapa Anda memilih langkah penyelesaian secara langsung atas soal (i) $\int_{-1}^2 \sqrt{x} dx$ yang diberikan?

S2: Karena soal tersebut menurut saya bisa saya selesaikan, jadi langsung saya selesaikan menggunakan aturan integral tentu yang saya pahami. Kemudian, setelah saya kerjakan, saya memperoleh jawaban adanya unsur akar imajiner dalam jawaban saya.

P: Apakah Anda sudah yakin dengan jawaban yang Anda tuliskan?

S2: Ya, saya yakin.

Untuk soal tes (i) tersebut, subjek tiga (S3) disajikan pada Gambar 3 berikut.

Gambar 3. Jawaban Soal (i) $\int_{-1}^2 \sqrt{x} dx$ Oleh Subjek Tiga (S3)

Berdasarkan jawaban yang ditulis oleh subjek tiga (S3) seperti yang tertera pada Gambar 3, tampak bahwa S3 langsung melakukan proses penyelesaian tanpa memperhatikan kekontinuan \sqrt{x} pada interval $[-1,2]$. Namun, diakhir penyelesaian, subjek menyimpulkan bahwa soal tes (i) $\int_{-1}^2 \sqrt{x} dx$ tidak dapat diselesaikan atas dasar \sqrt{x} tidak real pada interval $[-1,0]$. Untuk hasil ini, peneliti memperjelas maksud jawaban yang ditulis oleh S3 melalui wawancara sebagai berikut.

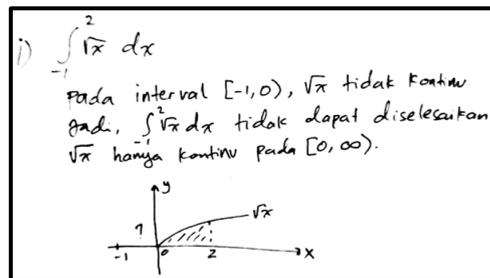
P: Mengapa Anda memilih langkah penyelesaian secara langsung atas soal (i) $\int_{-1}^2 \sqrt{x} dx$ yang diberikan?

S3: Karena soal tersebut menurut saya bisa saya selesaikan, jadi langsung saya selesaikan menggunakan aturan integral tentu yang saya pahami. Namun, setelah saya kerjakan, saya memperoleh jawaban adanya unsur akar imajiner dalam jawaban saya. Kemudian saya perhatikan kembali soalnya, ternyata soalnya merupakan fungsi yang berbentuk akar yang memiliki daerah asal pada interval $[0, \infty)$. Sedangkan batasnya $[-1,2]$, jadi soal ini tidak dapat diselesaikan.

P: Apakah Anda sudah yakin dengan jawaban yang Anda tuliskan?

S3: Ya, saya yakin.

Untuk soal tes (i) tersebut, subjek empat (S4) disajikan pada Gambar 4 berikut.



Gambar 4. Jawaban Soal (i) $\int_{-1}^2 \sqrt{x} dx$ Oleh Subjek Empat (S4)

Berdasarkan jawaban yang ditulis oleh subjek empat (S4) seperti yang tertera pada Gambar 3, tampak bahwa S4 tidak langsung melakukan proses penyelesaian. Namun, terlebih dahulu memperhatikan kekontinuan \sqrt{x} pada batas integral yang diminta. Dengan alasan bahwa \sqrt{x} pada interval $[-1,0]$ tidak kontinu, S4 menyimpulkan $\int_{-1}^2 \sqrt{x} dx$ tidak dapat diselesaikan. S4 juga menambahkan penguatan bahwa \sqrt{x} hanya kontinu pada interval $[0, \infty)$ yang sekaligus diperjelas

melalui grafik seperti yang tertera pada Gambar 4. Untuk hasil ini, peneliti memperjelas maksud jawaban yang ditulis oleh S4 melalui wawancara sebagai berikut.

P: Mengapa Anda memilih langkah tidak langsung menyelesaikan soal (i) $\int_{-1}^2 \sqrt{x} dx$ yang diberikan?

S4: Karena saya perhatikan soalnya mendorong saya untuk mencari alasan mengapa bisa/tidak bisa soal tersebut diselesaikan.

P: Menurut Anda apa yang perlu diperhatikan sebelum menyelesaikan soal tersebut?

S4: Karena soal yang diberikan berupa integral tentu, maka yang perlu saya perhatikan untuk menjamin soal tersebut bisa diselesaikan adalah kekontinuan fungsi yang diintegrasikan.

P: Apakah soal tersebut kontinu pada batas integral yang diberikan?

S4: Tidak. Karena \sqrt{x} tidak kontinu interval $[-1,0)$.

P: Apakah Anda sudah yakin dengan jawaban yang Anda tuliskan?

Kesimpulan

Kesimpulan dari penelitian ini menunjukkan bahwa konstruksi suatu model mental yang dimiliki calon guru matematika dalam memahami konsep integral ada yang lengkap dan ada yang tidak. Hal ini ditunjukkan berdasarkan bagaimana calon guru dalam menuliskan jawaban terkait konsep-konsep yang dapat digunakan untuk dalam menyelesaikan suatu masalah yang disajikan. Penelitian mendatang dapat memperluas cakupan konsep yang dikaji, tidak hanya terbatas pada konsep integral, tetapi juga pada konsep-konsep lain dalam kalkulus seperti limit, turunan, atau aplikasi integral. Hal ini penting untuk melihat konsistensi atau perbedaan dalam proses konstruksi model mental pada berbagai konsep matematika yang saling berkaitan.

Daftar Pustaka

Arnon, I., Cottrill, J., & Dubinsky, E. (2014). *APOS Theory: A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*. New York. Springer.

Bell, Frederick H (1981). *Teaching And Learning Mathematics (In SekondariSchool)*. Wnc Brown Comp. Publishers, IOWA USA.

Barsalou, L.W. 1992. *Cognitive psychology: an overview for cognitive scientist*. Hillsdale. New Jersey: LEA (Lawrence Erlbaum Associates), 410 page.

- Bofferding, L. 2014. Negative Integer Understanding: Characterizing First Graders' Mental Models. *Journal for Research in Mathematics Education*, 45(2), 194–245.
- Byers, V. (1980). What does it mean to understand mathematics? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 11(1), 1–10. <https://doi.org/10.1080/0020739800110101>.
- Creswell, J. W. (2014). *Research design*. Los Angeles: SAGE.
- Davis, E. J. (2015). *National Council of Teachers of Mathematics A Call for Postdoctoral Positions in Mathematics Education*. 45(5), 542–549.
- Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 95–123). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- Glaserfeld, E. von. (1983). Learning as constructive activity. *Key Works in Radical Constructivism*, 1, 1–19. https://doi.org/10.1163/9789087903480_002.
- Hoban, R. A., & Hoban, R. A. (2018). *International Journal of Mathematical Education in A resource for introducing students to the integral concept A resource for introducing students to the integral concept*. 5211. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1480809>.
- Serhan, D. (2015). *Students ' Understanding of the Definite Integral Concept Students ' Understanding of the Definite Integral Concept*.
- Sierpinska, A. (2013). Understanding in Mathematics. In *Understanding in Mathematics*. <https://doi.org/10.4324/9780203454183>
- Utari, R. S., & Utami, A. (2020). *Kemampuan Pemahaman Konsep Mahasiswa dalam Mengidentifikasi Penyelesaian Soal Integral Tak Tentu dan Tentu*. 14(1), 39–50.
- Verberg, D., Purcell, E., & Rigdon, S. (2010). *Dale Varberg, Edwin Purcell, Steve Rigdon-Calculus -Prentice.pdf*.
- Walshaw, M. (2017). Understanding mathematical development through Vygotsky. *Research in Mathematics Education*, 19(3), 293–309. <https://doi.org/10.1080/14794802.2017.1379728>.
- Yoong, W. K. (1987). *Aspects of Mathematical Understanding*. 8(2), 45–55.
- Yoong, W. K. (2015). Effective mathematics lessons through an eclectic singapore

approach: Yearbook 2015 association of mathematics educators. In *Effective Mathematics Lessons Through an Eclectic Singapore Approach: Yearbook 2015 Association of Mathematics Educators*.
https://doi.org/10.1142/9789814696432_fmatter.

Yuliana, D., & Ratu, N. (2018). *Deskripsi Kemampuan Pemahaman Konsep*. 5(1), 51–65.